# 论文阅读笔记（2）

——《Two-Dimensional PCA: A New Approach to Appearance-Based Face Representation and Recognition》

## 概述

### 论文信息

作者：Jian Yang, David Zhang, Alejandro F. Frangi, Jing-yu Yang

来源：IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 26, NO. 1, JANUARY 2004

论文实验数据来源：ORL, AR, and Yale face databases

### 论文主要贡献：

提出了2DPCA（two-dimensional principal component analysis）

### 论文涉及到的知识点：

|  |  |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |

### 重点参考文献

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

### 内容提要

PCA算法用来进行特征抽取和图像表示，Sirovich and Kirby最早用PCA来进行人脸图像表示，他们认为：任何一幅人脸图像都可以用小规模的图像集合加权来进行近似重构（…any face image could be reconstructed approximately as a weighted sum of a small collection of images that define a facial basis (eigenimages), and a mean image of the face）。

PCA的缺点：不能捕捉到不变性，哪怕是最简单的不变性，除非在训练数据中将这种不变性明显地提供出来。

ICA（Independent Component Analysis）的缺点：如果使用欧式距离进行度量，其性能比PCA 好不了多少，比PCA更耗费计算资源。

Kernel PCA的缺点：比PCA更耗费计算资源。

|  |
| --- |
| 原文：The experimental results in [14] showed the ratio of the computation time required by ICA, Kernel PCA, andPCA is, on average, 8.7: 3.2: 1.0. |

PCA算法需要预先将图像转换为一维向量，导致维度很高，难以计算协方差矩阵，由于可以用SVD奇异值分解来得到特征向量，这样就避免了计算协方差矩阵。但是，由于特征向量是根据协方差矩阵统计地计算出来的，因此这种避开协方差矩阵的计算并不见得可以准确计算图像的特征向量。

文章提出的2DPCA算法与PCA算法的最大不同在于：2DPCA基于二维矩阵，而不像PCA那样基于一维向量。这样带来了两个不同：（1）图像矩阵不需要预先转换为一维向量；（2）可以利用原始图像矩阵直接构建协方差矩阵，并且2DPCA构建的协方差矩阵要小得多。因此带来了两个好处：（1）容易计算协方差矩阵；（2）计算特征向量时花费的时间短。

## TWO-DIMENSIONAL PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

### Idea and Algorithm

获得一个投影特征向量Y的方法如下：



这个公式可以粗略地翻译为：

**投影特征向量** = **图像** × **投影向量**

其中，A是一个*m*\**n*的随机矩阵，X叫做投影向量，它是一个*n*维向量，Y是一个*m*维的向量。将矩阵A投影到X上，就可以产生Y，**Y被称为A的投影特征向量**。

可以这样理解：太阳光照在人身上，在地面投下了一道影子，A代表人，X代表太阳光，Y代表影子，不同的人有高矮胖瘦，他们的影子也必然不同，影子Y可以代表人的身体特征。

|  |
| --- |
| 矩阵乘矩阵，就是一组向量在另一组向量张成的坐标系里的投影值。正交矩阵，就是这样的一个矩阵，它自己在自己身上投影，投影出来的结果是一个单位矩阵I。什么时候才会出现这种情况呢？当然只有这个矩阵所代表的向量组里，所有向量两两垂直，才会出现在这种情况。所以叫“正交矩阵”，名字不是随便起的。 |

现在的问题是：如何才能得到一个好的投影向量X？一种衡量X分类能力的指标是投影样本的总离散度（total scatter of the projected samples），投影样本总分布可以认为是投影特征向量协方差矩阵的迹（the trace of the covariance matrix of the projected feature vectors）。

这里投影特征向量协方差矩阵是不是可以理解为上面公式中Y的协方差矩阵?

|  |
| --- |
| 什么是协方差矩阵？  在统计学与概率论中，**协方差矩阵是一个矩阵，其每个元素是各个向量元素之间的协方差。是从标量随机变量到高维度随机向量的自然推广。**  矩阵中的第(i,j)个元素是xi与xj的协方差。这个概念是对于标量随机变量方差的一般化推广。  尽管协方差矩阵很简单，可它却是很多领域里的非常有力的工具。它能导出一个变换矩阵，这个矩阵能使数据完全去相关(decorrelation)。从不同的角度来看，也就是说能够找出一组最佳的基以紧凑的方式来表达数据。(完整的证明请参考瑞利商)。这个方法在统计学中被称为主成分分析(principal components analysis)，在图像处理中称为Karhunen-Loève 变换(KL-变换)。 |

|  |
| --- |
| 什么是矩阵的迹？  设有N阶矩阵A，那么矩阵A的迹（用tr（**A**）表示）就等于A的特征值的总和，也即A矩阵的主对角线元素的总和。  1.迹是所有对角元的和  2.迹是所有特征值的和  3.某些时候也利用tr(AB)=tr(BA)来求迹 |

也就是说，我要判断投影向量X到底好不好，首先拿出X，将Y求出来，再求Y的协方差矩阵，将这个协方差矩阵的迹求出来就可以了，是这样吗？

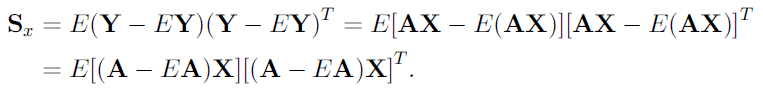
文章接着说，基于上面的这些观点，论文提出了下面这个公式：



其中表示训练样本投影特征向量的协方差矩阵，表示的迹。换句话说，要求出，首先要确定一个X（也就是太阳光），计算出投影特征向量Y（也就是地面上的影子），计算Y的协方差矩阵，最后计算的迹，这个迹就是，可以理解为“地面上的影子的协方差矩阵的迹”。

对于这个公式，将最大化的物理意义是：找到一个投影向量**X**，在这个投影向量上所有样本都可以被投射（所有的人都可以被一缕阳光照耀），投影样本的总散布值可以达到最大。可以理解为需要一缕合适的阳光，像中午的光线就不容易区分不同的人，因为散布值太小，而早晚的太阳光的散布值比较大，容易区分人。

协方差矩阵可以这样计算：



接下来计算协方差矩阵的迹

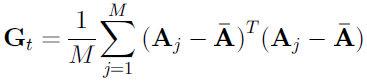


将中间较长的一段用另一个字母来表示：



这里的就被称为**图像协方差矩阵（或：图像协方差散射矩阵）**。从表达式可以看出，可以根据图像训练样本直接计算出来。

现在，假定一共有*M*个训练样本，第*j*幅图像可以用一个的矩阵来表示，从所有的训练样本中构造一个平均图像，用表示，这样，可以这样计算：



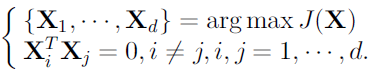
这样，训练样本投影特征向量的协方差矩阵的迹就等于，即：



这一整套做法称为**generalized total scatter criterion（广义全离散度准则）**，逻辑思维总结：要找到一个好的投影向量 🡪 求出投影向量的离散度 🡪 投影特征向量协方差矩阵的迹 🡪 将迹的表达式中间一段用图像协方差矩阵来替换 🡪 计算。

如果有一个投影向量**X**（一缕阳光），能够使这个标准的离散度达到最大，那么这个投影向量就称为**optimal projection axis（最优投影轴）**。样本集经过这个投影向量X的投影后，投影样本（地面上的影子）的离散度能够达到最大。此时的特征向量就是最大的特征值。它是什么的特征值？

一般而言，只有一个最优投影轴是不够的，通常的做法是选择一个投影轴的集合，这个集合包含多个投影轴， ，它们均服从正交约束，让这个投影轴集合使离散度达到最大，相当于找出多屡阳光。公式如下：



实际上，**最优投影轴**是的正交特征向量中前*d*个最大的特征值。

什么是正交约束？对于投影轴集合，实际操作中如何满足上面公式中的argmax？投影轴应该是一些向量，而的正交特征向量中前d个最大的特征值应该是一些数字，向量怎么会是数字呢？

文中只说明了如何寻找最优的投影向量，但投影向量是怎样产生的？怎样构造一个投影向量？

### Feature Extraction

前面讲述的2DPCA的最优投影向量，可以用来进行特征抽取，给定一个图像样本**A**，令

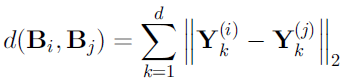


这样，就得到了一系列的投影特征向量（一组地面上的影子），它们就是图像样本**A**的主成分向量。需要注意的是，2DPCA中的每一个主成分都是一个向量，而PCA中的主成分却是一个标量。

将这一系列的投影特征向量放在一起，可以构成一个的矩阵，这个矩阵被称为**图像样本A的特征矩阵或特征图像**。

### Classification Method

在经过2DPCA转换之后，每一幅图像都会有一个特征矩阵，那么，可以采用最邻近分类法对图像进行分类。计算任意两个特征矩阵 和之间的距离



其中是两个主成分向量和之间的欧式距离。可以这么理解：现在选择了许多条光线，同一个光线照在两个不同的人上，在地面上形成了两个影子，这两个影子之间的欧式距离就是

## 2DPCA-BASED IMAGE RECONSTRUCTION

## EXPERIMENTS AND ANALYSIS

## CONCLUSION AND FUTURE WORK

## 附1 协方差矩阵的计算

协方差矩阵在机器学习中经常用到，查看wiki：[http://zh.wikipedia.org/wiki/协方差矩阵](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8F%E6%96%B9%E5%B7%AE%E7%9F%A9%E9%98%B5)可知协方差矩阵的具体计算公式如下：

在[统计学](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%9F%E8%AE%A1%E5%AD%A6)与[概率论](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A6%82%E7%8E%87%E8%AE%BA)中，**协方差矩阵**是一个矩阵，其每个元素是各个向量元素之间的[协方差](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%B1%E8%AE%8A%E7%95%B0%E6%95%B8)。这是从标量[随机变量](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9A%8F%E6%9C%BA%E5%8F%98%E9%87%8F)到高维度[随机向量](http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%9A%8F%E6%9C%BA%E5%90%91%E9%87%8F&action=edit&redlink=1)的自然推广。

假设X是以n个标量随机变量组成的[列向量](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%88%97%E5%90%91%E9%87%8F)，

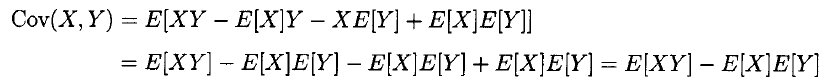


并且\mu_i是其第i个元素的[期望值](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%9F%E6%9C%9B%E5%80%BC)，即, \mu_i = \mathrm{E}(X_i)。协方差矩阵被定义的第i，j项是如下：

\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}\begin{bmatrix} (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \end{bmatrix}

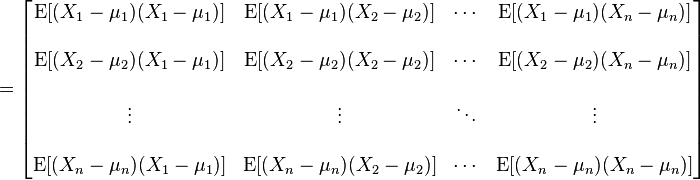
其中，





即：

\Sigma=\mathrm{E} \left[ \left( \textbf{X} - \mathrm{E}[\textbf{X}] \right) \left( \textbf{X} - \mathrm{E}[\textbf{X}] \right)^\top \right]



矩阵中的第(i,j)个元素是X_i与X_j的协方差。这个概念是对于[标量](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A0%87%E9%87%8F)[随机变量](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9A%8F%E6%9C%BA%E5%8F%98%E9%87%8F)[方差](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%B9%E5%B7%AE)的一般化推广。